Integration für gebrochen rationale Funktionen: Reduktionsformel

$$\int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^n}dx = \frac{x}{2b(n-1)\left(ax^2+b\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b(n-1)}\int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}dx$$

oder

die umgekehrte partielle Integration

Text 48052

Stand 25. Mai 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Gebrochen rationalen Funktionen:

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden - Übersicht
Datei Nr. 48051	Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48062	Sammlung schwerer Integrale

Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Integrale der Form $\int \frac{1}{(ax^2+b)^n}dx$ lassen sich nicht ohne sehr großen Aufwand integrieren.

Es gibt jedoch dazu eine Reduktionsformel, die mit der umgekehrten partiellen Integration bewiesen werden kann. Damit kann man diese Integrale nicht direkt berechnen, sondern in ein einfacheres Integral verwandeln. Bei diesem hat sich der Exponent der Nennerklammer um 1 verkleinert.

Beispiele: $$\int \frac{1}{(x^2+3)^2}dx = \frac{x}{6\cdot(x^2+3)} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2+3)}dx$$

$$\int \frac{12}{(x^2-4)^2}dx = -\frac{x}{8(x^2-4)} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2-4)}dx$$

Die Arbeit geht dann aber weiter. Mit etwas Erfahrung erkennt man, dass man nach Umformungen im oberen Beispiel auf eine Arkustangensfunktion als Stammfunktion kommt, während man beim zweiten Beispiel den Bruch zuerst mit der Partialbruchzerlegung in zwei einfachere Brüche auftrennt, die man dann integrieren kann. Dies wird auf den folgenden Seiten gezeigt. Aber Achtung: Man benötigt die Methoden der Partialbruchzerlegung! (Siehe Texte 43055 und 48051)

Es sei aber darauf hingewiesen, dass man auch ohne diese Formel auskommt, wenn man die dahinter wirksame (kaum bekannte) **umgekehrte partielle Integration** anwendet. Ich zeige dies an einem Beispiel!

Inhalt

1	Zuerst eine umgekehrte partielle Integration zu $\int \frac{1}{(x^2+3)^2}dx$	4
2	Herleitung der Reduktionsformel	6
3	Anwendungsbeispiele:	
	Reduktion von $\int \frac{1}{(x^2+3)^2}dx$ und $\int \frac{1}{(x^2+3)^3}dx$	8
	Berechnung von $\int \frac{1}{(x^2+3)^3}dx$ mit umgekehrter partieller Integration	9
	Reduktion von $\int \frac{12}{(x^2-4)^2}dx$	10
	Berechnung von $\int \frac{12}{(x^2-4)^2}dx$ ohne Reduktionsformel	10/11

Demo-Text für www.mathe-cd.de